第 2 章　三角恒等变换

2.1　两角和与差的三角函数

2.1.1　两角和与差的余弦公式+
2.1.2　两角和与差的正弦公式+
2.1.3　两角和与差的正切公式

·易错记·

1-1. D　【解析】$\because \cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 且 $0<\beta<\alpha<\pi$, $\therefore -\frac{\pi}{2}<\beta-\alpha<0$,

$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin(\beta-\alpha)=-\sqrt{1-\frac{1}{3}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$,

$\therefore \cos\beta=\cos[(\beta-\alpha)+\alpha]=\cos(\beta-\alpha)\cos\alpha-\sin(\beta-\alpha)\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{3}-\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$, 故选 D.

2-1. D　【解析】$\because P(1,4\sqrt{3})$, $\therefore OP=7$, $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\cos\alpha=\frac{1}{7}$.

由已知 $\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\frac{3\sqrt{3}}{14}$, 及诱导公式可得 $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{3\sqrt{3}}{14}$, $\therefore \sin(\alpha-\beta)=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

$\because 0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\therefore 0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$,

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=\frac{13}{14}$,

$\therefore \sin\beta=\sin[\alpha-(\alpha-\beta)]=\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{13}{14}-\frac{1}{7}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

且 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $\therefore \beta=\frac{\pi}{3}$, 故选 D.

2-2. C　【解析】因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2}{3}$,

所以 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{3}$,

所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{6-4\sqrt{5}}{15}\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$，所以 $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$.

又 $\cos\alpha=\frac{4}{5}\Rightarrow\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$，且已知 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\beta\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right)$.

综上，$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$.

· 题型诀 ·

1-1. D 【解析】$\tan 975°=\tan(5\times180°+75°)=\tan 75°=\tan(30°+45°)=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}$，故选 D.

1-2. 【解】$\dfrac{2\cos 10°-\sin 20°}{\cos 20°}$

$=\dfrac{2\cos(30°-20°)-\sin 20°}{\cos 20°}$

$=\dfrac{2\cos 30°\cos 20°+2\sin 30°\sin 20°-\sin 20°}{\cos 20°}$

$=2\cos 30°=\sqrt{3}$.

2-1. B 【解析】因为 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan\alpha=3>0$，所以 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

因为 $\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $-\frac{\pi}{4}<\alpha+\beta<\pi$，又 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}<0$，

故 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$，所以 $\tan(\alpha+\beta)=-2$.

故 $\tan\beta=\tan[(\alpha+\beta)-\alpha]=\dfrac{-2-3}{1+(-2)\times3}=1$，

所以 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{3-1}{1+3\times1}=\dfrac{1}{2}$，

故选 B.

2-2. $\frac{5}{13}$ 【解析】由 α,β 为锐角，得 $0<\alpha+\beta<\pi$，则 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{63}{65}$.

由 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$,得 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

从而 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$=\left(-\frac{16}{65}\right)\times\frac{4}{5}+\frac{63}{65}\times\frac{3}{5}=\frac{5}{13}$.

2-3.【解】因为 $\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3\pi}{4}$,

所以 $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{4}$,$\pi<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$.

因为 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$,

所以 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$.

因为 $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$,

所以 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{4}{5}$.

所以 $\sin 2\alpha=\sin[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=-\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}=-\frac{56}{65}$.

3-1. C 【解析】因为 $\tan\alpha=\frac{1+\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,所以 $(1+\cos\beta)\cos\alpha=\sin\alpha\sin\beta$,

即 $\cos\alpha=\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta=-\cos(\alpha+\beta)=\cos[\pi-(\alpha+\beta)]$. 因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$,$\pi-(\alpha+\beta)\in(0,\pi)$.

因为 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减,所以 $\alpha=\pi-(\alpha+\beta)$,即 $2\alpha+\beta=\pi$,故选 C.

3-2.【解】(1)因为 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\alpha\in(0,\pi)$,

所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2$,

所以 $\tan\beta=\tan[\alpha-(\alpha-\beta)]=\frac{\tan\alpha-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan\alpha\tan(\alpha-\beta)}=\frac{1}{3}$.

(2)由(1)知 $\tan\beta=\frac{1}{3}$,则 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-2+\frac{1}{3}}{1-(-2)\times\frac{1}{3}}=-1$.

因为 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}<0,\alpha\in(0,\pi)$,

所以 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

因为 $\tan\beta=\frac{1}{3}>0,\beta\in(0,\pi)$,

所以 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$,

所以 $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$.

3-3.【解】因为 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的两根,

所以 $\tan\alpha+\tan\beta=5>0,\tan\alpha\tan\beta=6>0$,

因此 $\tan\alpha>0,\tan\beta>0$.

又 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$,所以 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$,

则 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{5}{1-6}=-1$,

因此 $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$.

4-1.【证明】因为 $2\alpha+\beta=\alpha+(\alpha+\beta),\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$,

所以 $\sin(2\alpha+\beta)=\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$,

$5\sin\beta=5\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=5\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha-5\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$.

由已知得 $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha=5\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-5\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$.

所以 $2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=3\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha$,

等式两边同时除以 $\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha$,得 $2\tan(\alpha+\beta)=3\tan\alpha$.

4-2.【证明】$\sin(2\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha=\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]-2\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin\beta$.

由待证式知 $\sin\alpha\neq0$,故两边同除以 $\sin\alpha$ 得 $\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

5-1. B 【解析】$\sin 123°\cos 27°-\sin 33°\cdot\sin 27°$

$=\sin 57°\cos 27°-\cos 57°\sin 27°$

$=\sin(57°-27°)$

$=\sin 30°$

$=\frac{1}{2}$.

5-2. B 【解析】因为 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2$,所以 $2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=2$,即 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$.

因为 $\theta\in(0,\pi)$,所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$,所以 $\sin\theta=\frac{1}{2}$. 故选 B.

5-3. ABC 【解析】对于 A,由于 $\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)$,

所以 $\tan 25°+\tan 35°+\sqrt{3}\tan 25°\tan 35°=\tan(25°+35°)(1-\tan 25°\tan 35°)+\sqrt{3}\tan 25°\tan 35°=\sqrt{3}(1-\tan 25°\tan 35°+\tan 25°\tan 35°)=\sqrt{3}$;

对于 B,因为 $\cos 65°=\sin 25°$,

所以 $2(\sin 35°\cos 25°+\cos 35°\cos 65°)=2(\sin 35°\cos 25°+\cos 35°\sin 25°)=2\sin 60°=\sqrt{3}$;

对于 C,因为 $\tan 45°=1$, 所以 $\frac{1+\tan 15°}{1-\tan 15°}=\frac{\tan 45°+\tan 15°}{1-\tan 45°\tan 15°}=\tan 60°=\sqrt{3}$;

对于 D, $\frac{\tan 74°+\tan 76°}{1-\tan 74°\tan 76°}=\tan(74°+76°)=\tan 150°=-\tan 30°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选 ABC.

5-4. A 【解析】$2\sin 14°\cos 31°+\sin 17°=2\sin 14°\cos 31°+\sin(31°-14°)=\sin 14°\cos 31°+\cos 14°\sin 31°=\sin(14°+31°)=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 A.

6-1. B 【解析】由已知,得 $\cos B=\cos C-\cos A$, $\sin B=\sin A-\sin C$,

两式分别平方相加得 $\cos^2 C-2\cos C\cos A+\cos^2 A+\sin^2 A-2\sin C\sin A+\sin^2 C=1$,

$\cos(C-A)=\frac{1}{2}$,由于 $A,B,C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

$\sin A-\sin C=\sin B>0$,因而 $A>C$,

所以 $C-A\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,从而 $C-A=-\frac{\pi}{3}$,

故选 B.

6-2. BCD 【解析】$3\sin A+4\cos B=6$,

$3\cos A+4\sin B=1$，两式分别平方相加得 $9\sin^2 A+9\cos^2 A+16\cos^2 B+16\sin^2 B+24\sin A\cos B+24\cos A\sin B=36+1$，

即 $9+16+24\sin(A+B)=37$，

因而 $\sin(A+B)=\frac{1}{2}$.

在 $\triangle ABC$ 中，$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\frac{1}{2}$，且 $C\in(0,\pi)$，因而 $C=\frac{\pi}{6}$ 或 $C=\frac{5\pi}{6}$.

又 $3\cos A+4\sin B=1$ 可化为 $4\sin B=1-3\cos A>0$，所以 $\cos A<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$，则 $A>\frac{\pi}{3}$，

故 $C=\frac{\pi}{6}$，故选 BCD.

6-3. $\frac{59}{72}$　【解析】$(\sin\alpha-\cos\beta)^2=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{9}$，

$(\cos\alpha-\sin\beta)^2=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{4}$，两式相加得 $2-2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=\frac{13}{36}$，

即 $2-2\sin(\alpha+\beta)=\frac{13}{36}$，

解得 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{59}{72}$.

2.2　二倍角的三角函数

·题型诀·

1-1. C　【解析】对于 A，$\frac{1}{2}(\cos 15°-\sin 15°)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 45°\cos 15°-\sin 45°\cdot\sin 15°)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(45°+15°)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 60°=\frac{\sqrt{2}}{4}$，A 不符合；对于 B，$\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，B 不符合；对于 C，$\frac{\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°}=\frac{1}{2}\times\frac{2\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°}=\frac{1}{2}\cdot\tan 45°=\frac{1}{2}$，C 符合；对于 D，$\sin 15°\cdot\cos 15°=\frac{1}{2}\sin 30°=\frac{1}{4}$，D 不符合. 故选 C.

1-2. B　【解析】原式=

$\dfrac{1+\tan\dfrac{\pi}{12}-1+\tan\dfrac{\pi}{12}}{1-\tan^2\dfrac{\pi}{12}}=\dfrac{2\tan\dfrac{\pi}{12}}{1-\tan^2\dfrac{\pi}{12}}=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,故选 B.

1-3.【解】(1)原式 $=\dfrac{\sin(90°+20°)\sin 20°}{\cos 50°}=\dfrac{\sin 20°\cos 20°}{\cos 50°}=\dfrac{\frac{1}{2}\sin 40°}{\sin 40°}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\dfrac{\sin^2 50°}{1+\sin 10°}=\dfrac{1-\cos 100°}{2(1+\sin 10°)}=\dfrac{1-\cos(90°+10°)}{2(1+\sin 10°)}=\dfrac{1+\sin 10°}{2(1+\sin 10°)}=\dfrac{1}{2}$.

(3)原式 $=\dfrac{\cos 10°-\sqrt{3}\sin 10°}{\sin 10°\cos 10°}$

$=\dfrac{2\left(\dfrac{1}{2}\cos 10°-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°\right)}{\sin 10°\cos 10°}$

$=\dfrac{4(\sin 30°\cos 10°-\cos 30°\sin 10°)}{2\sin 10°\cos 10°}$

$=\dfrac{4\sin(30°-10°)}{\sin 20°}=4$.

2-1. B　【解析】由 $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\dfrac{3}{5}-\cos(\pi-\alpha)$,可得 $\dfrac{1}{2}\cos\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\dfrac{3}{5}+\cos\alpha$,

即 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\dfrac{1}{2}\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$,

即 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{3}{5}$,

所以 $\cos\left(2\alpha-\dfrac{2\pi}{3}\right)=2\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)-1=2\times\dfrac{9}{25}-1=-\dfrac{7}{25}$,

所以 $\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left[\left(2\alpha-\dfrac{2\pi}{3}\right)+\pi\right]=-\cos\left(2\alpha-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{7}{25}$,故选 B.

2-2.【解】(1)$\because \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$,

$\therefore \sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1-\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{98}{100}$.

又 $\because x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$,$x-\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$\therefore \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)>0$,$\therefore \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=$

$\sqrt{\frac{98}{100}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$,

$\therefore \sin x=\sin\left[\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]$

$=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{7\sqrt{2}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4}{5}$.

(2)由(1)可知 $\sin x=\frac{4}{5},x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$,

则 $\cos x=-\sqrt{1-\sin^2 x}=-\frac{3}{5}$,

$\sin 2x=2\sin x\cos x=-\frac{24}{25}$,

$\cos 2x=2\cos^2 x-1=-\frac{7}{25}$.

$\therefore \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x\cos\frac{\pi}{4}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{4}=\left[-\frac{24}{25}-\left(-\frac{7}{25}\right)\right]\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{17\sqrt{2}}{50}$.

3-1. $-\frac{5\pi}{4}$　【解析】因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\alpha=\frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\cos\beta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{98}{100}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$,

$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\frac{20}{25}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=7$, $\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{1}{2}$,

所以 $\tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$,

所以 $\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan 2\beta}{1-\tan\alpha\tan 2\beta}=\frac{7+\frac{4}{3}}{1-7\times\frac{4}{3}}=-1$. 因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\alpha+2\beta\in\left(-2\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$, 从而 $\alpha+2\beta=-\frac{5\pi}{4}$.

4-1. C　【解析】$\frac{4\sin 24^\circ\cos 24^\circ}{\cos 12^\circ}+\tan 12^\circ=\frac{2\sin 48^\circ+\sin 12^\circ}{\cos 12^\circ}=\frac{2\sin(60^\circ-12^\circ)+\sin 12^\circ}{\cos 12^\circ}=$

$\frac{\sqrt{3}\cos 12°-\sin 12°+\sin 12°}{\cos 12°}=\sqrt{3}$. 故选 C.

4－2.【解】原式 $=\frac{(1+\cos\theta)-\sin\theta}{(1-\cos\theta)-\sin\theta}+\frac{(1-\cos\theta)-\sin\theta}{(1+\cos\theta)-\sin\theta}$

$$=\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}+\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)}+\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=-\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}-\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=-\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=-\frac{2}{\sin\theta}.$$

4－3.【解】方法一：原式 $=\sin 3x\sin x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+\cos 3x\cos x\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}(\sin 3x\sin x+\cos 3x\cos x)+\frac{1}{2}\cos 2x\cdot(\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\cos 4x=\frac{1}{2}\cos 2x(1+\cos 4x)=\cos^3 2x$.

方法二：$\sin^3 x\sin 3x+\cos^3 x\cos 3x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}\cdot\sin 3x+\frac{3\cos x+\cos 3x}{4}\cdot\cos 3x=\frac{1}{4}(3\sin x\sin 3x-\sin^2 3x+3\cos x\cdot\cos 3x+\cos^2 3x)=\frac{1}{4}[3(\cos x\cos 3x+\sin x\cdot\sin 3x)+(\cos^2 3x-\sin^2 3x)]=\frac{3\cos 2x+\cos 6x}{4}=\frac{3\cos 2x+4\cos^3 2x-3\cos 2x}{4}=\cos^3 2x$.

4－4.【解】$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=$

$\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|+\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$，由$\frac{3\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<2\pi$，得原式$=\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

4-5.【解】由于$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则$\sin\alpha-\cos\alpha>0$，$\sin\alpha+\cos\alpha>0$，

因而$\sqrt{2+2\cos 2\alpha}+\sqrt{1-\sin 2\alpha}-\sqrt{1+\sin 2\alpha}$

$=\sqrt{2+4\cos^2\alpha-2}+\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}-\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$

$=2\cos\alpha+\sin\alpha-\cos\alpha-\sin\alpha-\cos\alpha=0$.

5-1.【证明】左边

$=\frac{2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta}{2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2\sin^2\theta+\cos\theta}$

$=\frac{\sin\theta(2\cos\theta+1)}{\cos\theta(2\cos\theta+1)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=$右边，

所以原式成立.

5-2.【证明】左边

$=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\cos^2\alpha-1-2\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{2\cos\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{2\cos\alpha}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tan\alpha=$右边，即原式成立.

6-1. A 【解析】∵ 关于x的方程$x^2-x\cos A\cos B-\cos^2\frac{C}{2}=0$有一个根是1，

∴ $1-\cos A\cos B-\cos^2\frac{C}{2}=0$，∴ $\sin^2\frac{C}{2}=\cos A\cos B$，即$\frac{1-\cos C}{2}=\cos A\cos B$，

∴ $1=2\cos A\cos B-\cos(A+B)=\cos A\cdot\cos B+\sin A\sin B=\cos(A-B)$.

∵ $0<A<\pi$，$0<B<\pi$，∴ $-\pi<A-B<\pi$，∴ $A-B=0$，∴ $A=B$，

∴ $\triangle ABC$是等腰三角形. 故选 A.

6-2. A 【解析】$\sin^2\frac{B+C}{2}+\cos 2A=\frac{1-\cos(B+C)}{2}+2\cos^2A-1=\frac{1+\cos A}{2}+2\cos^2A-1=-\frac{1}{9}$. 故选 A.

7-1. B 【解析】因为大正方形的面积为25，小正方形的面积为1，所以大正方形的边长为5，小正方形的边长为1，所以

$5\sin\theta-5\cos\theta=1$，即 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{5}$，两边平方得 $1-\sin 2\theta=\frac{1}{25}$，即 $\sin 2\theta=\frac{24}{25}$. 因为 θ 是直角三角形中较大的锐角，所以 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{2}<2\theta<\pi$，所以 $\cos 2\theta=-\sqrt{1-\sin^2 2\theta}=-\frac{7}{25}$. 故选 B.

7-2. A 【解析】$\because a=2\cos 72°$，$\therefore a^2=4\cos^2 72°$，可得 $4-a^2=4-4\cos^2 72°=4\sin^2 72°$，$\therefore \sqrt{4-a^2}=2\sin 72°$，

$\therefore a\sqrt{4-a^2}=2\cos 72°\cdot 2\sin 72°=2\sin 144°=2\sin 36°$，

$\therefore \frac{1-2\sin^2 27°}{a\sqrt{4-a^2}}=\frac{\cos 54°}{2\sin 36°}=\frac{\sin 36°}{2\sin 36°}=\frac{1}{2}$. 故选 A.

2.3　简单的三角恒等变换

· 易错记 ·

1-1. 【解】原式

$$=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}(-\cos\alpha)}{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

$\because \pi<\alpha<2\pi$，$\therefore \frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\pi$，$\therefore \cos\frac{\alpha}{2}<0$.

$\therefore$ 原式 $=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}(-\cos\alpha)}{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}=\frac{-\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{-\cos\frac{\alpha}{2}}=\cos\alpha$.

1-2. 【解】由 α,β 均为锐角得 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$. 又 $\sin\alpha-\sin\beta=-\frac{2}{3}<0$，

所以 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$.

$(\sin\alpha-\sin\beta)^2=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-$

$2\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{9}$,①

$(\cos\alpha-\cos\beta)^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta=\frac{4}{9}$,②

①+②得 $2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\frac{8}{9}$,

解得 $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{5}{9}$,

即 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{5}{9}$,

则 $\sin(\alpha-\beta)=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{9}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{14}}{9}$,

则 $\tan(\alpha-\beta)=-\frac{2\sqrt{14}}{5}$.

· 题型诀 ·

1-1. A 【解析】因为 α 为第三象限角,

所以$\frac{\alpha}{2}$为第二或第四象限角,

所以 $\tan\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=-\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{1-\frac{4}{5}}}=-3$,

所以$\frac{1+\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-3}{1+3}=-\frac{1}{2}$.

故选 A.

1-2. C 【解析】$\frac{1}{\cos 2\alpha}+\tan 2\alpha=\frac{1+\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{(1+\tan\alpha)^2}{1-\tan^2\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=2\ 021$,故选 C.

1-3. $\frac{1}{5}$ 【解析】$\because\theta\in(\pi,2\pi)$,$\therefore\frac{\theta}{2}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$\therefore\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\frac{4}{5}$,

$\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=-\frac{3}{5}$,

$\therefore\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{5}$.

1-4. $-\frac{3}{5}$　$\frac{1}{3}$ 【解析】因为 $\tan\theta=2$,

由万能公式得,$\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=-\frac{3}{5}$.

$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}$.

2-1. B 【解析】$\cos A\sin C=\frac{1}{2}[\sin(A+C)-\sin(A-C)]=\frac{1}{2}[\sin 135°-\sin(A-C)]$.

由 $-135°<A-C<135°$，得 $\sin(A-C)\in[-1,1]$，则 $\cos A\sin C\in\left[\frac{\sqrt{2}-2}{4},\frac{\sqrt{2}+2}{4}\right]$. 故选 B.

2-2. 【解】$\cos 29°\cos 31°-\frac{1}{2}\cos 2°=\frac{1}{2}[\cos(29°+31°)+\cos(29°-31°)]-\frac{1}{2}\cos 2°=\frac{1}{2}\cos 60°+\frac{1}{2}\cos 2°-\frac{1}{2}\cos 2°=\frac{1}{4}$.

3-1. D 【解析】$\because \cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$,

$\therefore 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{3}$. $\because \alpha-\beta=\frac{2\pi}{3}$,

$\therefore \frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\pi}{3}$, $\therefore \cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{2}$,

$\therefore \cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{3}$,

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1=-\frac{7}{9}$.

3-2. C 【解析】原式$=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\frac{1}{2}\times 2\cos\frac{2\alpha+\beta+\beta}{2}\cdot\sin\frac{2\alpha+\beta-\beta}{2}=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin\beta$，故选 C.

3-3. $\frac{2}{3}$ 【解析】$\because \cos x\cos y-\sin x\sin y=\frac{1}{2}$，$\therefore \cos(x+y)=\frac{1}{2}$.

$\because \sin 2x-\sin 2y=\frac{2}{3}$，由和差化积公式得，$2\cos(x+y)\sin(x-y)=\frac{2}{3}$,

$\therefore \sin(x-y)=\frac{2}{3}$.

4-1. B 【解析】原式$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha\right)=2\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\cdot\right.$

$\sin\dfrac{\pi}{6}\Big)=2\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)$.

故选 B.

4-2. B 【解析】$\sqrt{2}(\cos 72°+\cos 18°)=\sqrt{2}(\sin 18°+\cos 18°)=2\sin(18°+45°)=2\sin 63°\approx 2\times 0.891=1.782$. 故选 B.

4-3. A 【解析】$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\theta=-\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$可化为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{3}{2}\cos\theta=-\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$,整理得$\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$,即$\cos\dfrac{\pi}{6}\cos\theta+\sin\dfrac{\pi}{6}\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$,所以$\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{3}{5}$,所以$\cos\left(\theta+\dfrac{5\pi}{6}\right)=-\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$,故选 A.

5-1.【解】(1)原式

$=\dfrac{(1+\cos 2\alpha)+\cos\alpha+\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha+\cos\alpha}$

$=\dfrac{2\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha+\cos\alpha}$

$=\dfrac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha+\cos\alpha}$

$=2\cos\alpha$.

(2)原式$=\dfrac{(\sin A+\sin 5A)+2\sin 3A}{(\sin 3A+\sin 7A)+2\sin 5A}$

$=\dfrac{2\sin 3A\cos 2A+2\sin 3A}{2\sin 5A\cos 2A+2\sin 5A}$

$=\dfrac{2\sin 3A(\cos 2A+1)}{2\sin 5A(\cos 2A+1)}$

$=\dfrac{\sin 3A}{\sin 5A}$.

6-1. $\dfrac{\pi}{3}$ 【解析】因为 $A+B+C=\pi$,

所以 $2\cos B\cos C-2\cos(B+C)=\sqrt{3}\sin C$,

所以 $2\cos B\cos C-2(\cos B\cos C-\sin B\cdot\sin C)=\sqrt{3}\sin C$,

所以 $2\sin B\sin C=\sqrt{3}\sin C$.

因为 $\sin C>0$,所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为 $B\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$.

6-2. 4 【解析】因为 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2$,

所以$\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+1-\cos^2C=2$,

所以 $\cos^2C=-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)$

$=-\cos(A+B)\cos(A-B)$

$=\cos C\cos(A-B)$.

又因为 C 为最大角,所以$|A-B|\neq C$,

所以 $\cos C=0$,即 $C=\frac{\pi}{2}$.

设 $B=\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则在$\triangle ABC$ 中,$a=c\cos\theta$,$b=c\sin\theta$,

所以 $b+2a=c\sin\theta+2c\cos\theta=5$,

解得 $c=\frac{5}{\sin\theta+2\cos\theta}$,

所以 $a+c=\frac{5(1+\cos\theta)}{\sin\theta+2\cos\theta}$.

令$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta+2\cos\theta}=t>0$,

则$(2t-1)\cos\theta+t\sin\theta=1$,

所以 $\sqrt{(2t-1)^2+t^2}\sin(\theta+\varphi)\leqslant\sqrt{(2t-1)^2+t^2}\left(\tan\varphi=\frac{2t-1}{t}\right)$,

即 $\sqrt{(2t-1)^2+t^2}\geqslant 1$,

解得 $t\geqslant\frac{4}{5}$或 $t\leqslant 0$(舍去),

所以 $a+c$ 的最小值为 4.

7-1. C 【解析】由题意知,函数 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

当 $x=\frac{\pi}{6}$时,$2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=2$,不能得到函数$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$对称,故 A 错误;

由 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,得 $\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$,$f(\alpha)\in(\sqrt{3},2]$,不存在 $f(\alpha)=1$,故 B 错误;

函数$f(x+\alpha)$图象的对称轴方程为 $x+\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,即 $x=k\pi+\frac{\pi}{6}-\alpha(k\in\mathbf{Z})$,当 $k=0$,$\alpha=\frac{\pi}{6}$时,函数 $f(x+\alpha)$的图象关于 y 轴对称,故 C 正确;

由 $f(x+\alpha)=f(x+3\alpha)$ 可知,2α 是函数

$f(x)$的周期;又函数$f(x)$的周期为$2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$,故$\alpha=k\pi(k\in\mathbf{Z},k\neq0))$,所以不存在$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,使得$f(x+\alpha)=f(x+3\alpha)$恒成立,故D错误.故选C.

7-2. B 【解析】在$\triangle ABC$中,若$\sin(A-B)\cos B+\cos(A-B)\sin B\geqslant1$,则$\sin[(A-B)+B]=\sin A\geqslant1$,所以$\sin A=1,A=\frac{\pi}{2}$,故$\triangle ABC$是直角三角形.

7-3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】因为$\boldsymbol{a}=(\cos14°,\cos76°)$,$\boldsymbol{b}=(\cos59°,\cos31°)$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos14°\cos59°+\cos76°\cos31°=\cos14°\cos59°+\sin14°\sin59°=\cos(59°-14°)=\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7-4.【解】(1)因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=0$,则$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

又$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$,所以$\theta=\frac{\pi}{6}$.

(2)$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}$

$=\sqrt{1-2(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)+4}$

$=\sqrt{5-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)}$

$=\sqrt{5-4\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$.

因为$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$,所以$-\frac{2\pi}{3}\leqslant\theta-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{6}$,则$-1\leqslant\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{1}{2}$,所以$3\leqslant5-4\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant9$,故$\sqrt{3}\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant3$.

8-1. B 【解析】因为$OM=2$,$\angle AOM=x$,$\angle AOB=\frac{3\pi}{4}$,所以$\angle BOM=\frac{3\pi}{4}-x$,

所以$OE=OM\cdot\cos\angle AOM=2\cos x$,$ME=OM\cdot\sin\angle AOM=2\sin x$,

$OF=OM\cdot\cos\angle BOM=2\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$,

$MF=OM\cdot\sin\angle BOM=2\sin\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$,

所以$S_{四边形MEOF}=S_{\triangle MOE}+S_{\triangle MOF}=\frac{1}{2}\times$

$2\sin x\times 2\cos x+\frac{1}{2}\times 2\sin\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)\times 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$

$=\sin 2x+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=\sin 2x-\cos 2x$

$=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，故选 B.

8-2.【解】(1)如图，设 OG 与 CF，DE 分别交于 M，N 两点.

由已知得 $CM=ND=OC\sin x=\sin x$，$CF=2CM=2\sin x$.

$OM=OC\cos x=\cos x$，$ON=\frac{ND}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin x$，

所以 $CD=MN=OM-ON=\cos x-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin x$.

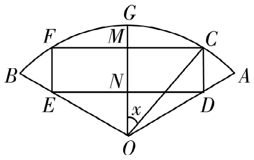
故 $S=CF\cdot CD=2\sin x\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin x\right)$

$=2\sin x\cos x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin^2 x$

$=\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(0<x<\frac{\pi}{3}\right)$.

当 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，$S=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$.



(2)因为 $0<x<\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{6}<2x+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

当且仅当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，S 取得最大值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.